

8991

Bibl. Jng.

IV



Rozwiązanie równań el-magn. go pola (Maxwella) w próżni

Równania zasadnicze :

$$c. \operatorname{curl} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots \quad \text{I}$$

$$c. \operatorname{curl} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \dots \quad \text{II}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \dots \quad \text{III}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \dots \quad \text{IV}$$

Wektor \vec{M} zespolony : określamy

$$\vec{M} = \vec{H} + i \vec{E} \quad \dots \quad (\text{M})$$

Mamy :

$$\operatorname{div} \vec{M} = \operatorname{div} \vec{H} + i. \operatorname{div} \vec{E} \quad \text{wzr 2 (III) i (IV)}$$

$$\operatorname{div} \vec{M} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

następnie

$$\operatorname{curl} \vec{M} = \operatorname{curl} \vec{H} + i. \operatorname{curl} \vec{E} \quad \text{wzr 2 (I) i (II)}$$

$$c. \operatorname{curl} \vec{M} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - i. \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$c. \operatorname{curl} \vec{M} = -i \left\{ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}$$

$$c. \operatorname{curl} \vec{M} = -i. \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \quad \dots \quad (2)$$

Wektor \vec{M}_* sprzężony : określamy

$$\vec{M}_* = \vec{H} - i \vec{E} \quad \dots \quad (\text{M}_*)$$

Otrzymujemy, jak wyżej : $\operatorname{div} \vec{M}_* = 0 \quad \dots \quad (3)$

$$c. \operatorname{curl} \vec{M}_* = +i. \frac{\partial \vec{M}_*}{\partial t} \quad \dots \quad (4)$$

Inwarianty : zakładamy określenia :

$$J_1 = \overline{\mathcal{H}}^2 - \overline{\mathcal{E}}^2 \quad \dots (J_1)$$

$$J_2 = s(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}}) \quad \dots (J_2)$$

Kwadraty : $\overline{\mathcal{M}}^2$ oraz $\overline{\mathcal{M}}_*^2$ z określeń (\mathcal{M}) i (\mathcal{M}_*) p. 1

$$\overline{\mathcal{M}}^2 = s(\overline{\mathcal{H}} + i\overline{\mathcal{E}})^2 = \overline{\mathcal{H}}^2 - \overline{\mathcal{E}}^2 + 2i s(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}})$$

$$\overline{\mathcal{M}}_*^2 = s(\overline{\mathcal{H}} - i\overline{\mathcal{E}})^2 = \overline{\mathcal{H}}^2 - \overline{\mathcal{E}}^2 - 2i s(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}})$$

wtedy $\overline{\mathcal{M}}^2 = J_1 + 2i J_2 \quad \dots (5)$

$$\overline{\mathcal{M}}_*^2 = J_1 - 2i J_2 \quad \dots (6)$$

{ Sprawdzenie : $\overline{\mathcal{M}}^2 = (\mathcal{H}_x + i\mathcal{L}_x)^2 + (\mathcal{H}_y + i\mathcal{L}_y)^2 + (\mathcal{H}_z + i\mathcal{L}_z)^2$

$$= \mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 + \mathcal{H}_z^2 - (\mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2)$$

$$+ 2i(\mathcal{L}_x\mathcal{H}_x + \mathcal{L}_y\mathcal{H}_y + \mathcal{L}_z\mathcal{H}_z)$$

powracamy do (5)

i podobnie (6) }

Iloczyn skalarny $s(\overline{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}_*)$

$$s(\overline{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}_*) = s(\overline{\mathcal{H}} + i\overline{\mathcal{E}})(\overline{\mathcal{H}} - i\overline{\mathcal{E}})$$

$$= s(\overline{\mathcal{H}}^2) + s(\overline{\mathcal{E}}^2) = 8\pi\rho \left. \begin{array}{l} \text{gdzie } \rho \text{ jeston} \\ \text{el magn. energii} \end{array} \right\} (7)$$

Iloczyn wektorowy $v(\overline{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}_*)$

$$v(\overline{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}_*) = v(\overline{\mathcal{H}} + i\overline{\mathcal{E}})(\overline{\mathcal{H}} - i\overline{\mathcal{E}})$$

ponieważ $v(\overline{\mathcal{H}}^2) = 0$, $v(\overline{\mathcal{E}}^2) = 0$, zatem

$$v(\overline{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}_*) = 2i v(\overline{\mathcal{E}}\overline{\mathcal{H}}) \quad (8) \text{proporcjonalny do wektora}$$

R. Poyntinga .

Wniosek. Z równań (5) i (6) p.2

$$\overline{M}^2 = J_1 + 2iJ_2 \quad \dots (5)$$

$$\overline{M}_*^2 = J_1 - 2iJ_2 \quad \dots (6)$$

wyprowadzamy:

$$\overline{M}^2 \cdot \overline{M}_*^2 = J_1^2 + 4J_2^2 \quad \dots (9)$$

Uzupełnienie twierdzenia Poyntinga. Pisząc

$$\overline{E}^2 + \overline{H}^2 = s(\overline{M}\overline{M}_*) \quad \text{por. (7)}$$

$$= 8\pi\rho \quad (\text{określenie } \rho) \quad \dots (10)$$

oraz Poyntinga

$$\overline{R} = \frac{c}{4\pi} v(\overline{E}\overline{H}) = -\frac{ic}{8\pi} v(\overline{M}\overline{M}_*) \quad \text{por. (8)}$$

$$= \rho \overline{V} \quad \dots (\text{określenie } \overline{V}) \quad \dots (11)$$

przekonywamy się, że

$$\rho^2 (c^2 - V^2) = \frac{c^2}{64\pi^2} \{ (s(\overline{M}\overline{M}_*))^2 + (v(\overline{M}\overline{M}_*))^2 \}$$

$$= \frac{c^2}{64\pi^2} \overline{M}^2 \cdot \overline{M}_*^2$$

$$= \frac{c^2}{64\pi^2} \{ J_1^2 + 4J_2^2 \} \quad \dots (12)$$

zatem ≥ 0 gdyż J_1, J_2 są rzeczywiste

zatem $V \leq c$. Z określenia (11) i hydrodyn. analogii - sens \overline{V} .
 $\left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div } \overline{V} = 0 \right]$

Fala elektromagnetyczna "czysta". Jeżeli $\overline{H}^2 = \overline{E}^2$
 oraz $s(\overline{E}\overline{H}) = 0$

powiadaemy, że fala d-m-jed "czysta"; przykład mieliśmy dawniej.

4
Jeżeli zatem fala jest "czysta", mamy: (por. p. 2)

$$J_1 = 0 \quad J_2 = 0$$

Zatem, według (12): $V = c$

W fali czystej: $\bar{M}^2 = 0$

$$\bar{M}_*^2 = 0$$

por. (5) i (6) p. 2

Zadanie I. Dowiedź, że, w przypadku fali czystej, mamy

$$\int (\bar{M} \cdot \text{curl} \bar{M}) = 0 \quad \dots (13)$$

a także

$$\int (\bar{M} \cdot \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}) = 0 \quad \dots (14)$$

Zadanie II. Przypuśćmy, że istnieją \bar{A}, \bar{B} takie, że

$$\bar{M} = v(\nabla \bar{A} \cdot \nabla \bar{B}) \quad \dots (15)$$

$$\text{oraz} \quad c \bar{M} = i \left\{ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \nabla \bar{A} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \nabla \bar{B} \right\} \quad \dots (16)$$

Czy takie założenia mogą uczynić zadowyć. związekom

$$\text{div} \bar{M} = 0 \quad \dots (1) \text{ p. 1}$$

$$c \cdot \text{curl} \bar{M} = - i \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \quad \dots (2) \text{ p. 1} \quad ?$$

Związek (1). Mamy tożsamość, dla dowolnych wektorów $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$

$$\text{div} v(\bar{\alpha} \bar{\beta}) = \int (\bar{\beta} \cdot \text{curl} \bar{\alpha}) - \int (\bar{\alpha} \cdot \text{curl} \bar{\beta})$$

Jeżeli $\bar{\alpha} = \nabla \bar{A}$, $\bar{\beta} = \nabla \bar{B}$, wtedy $\text{curl} \bar{\alpha} = 0$, $\text{curl} \bar{\beta} = 0$

mamy zatem równość: $\text{div} v(\nabla \bar{A} \cdot \nabla \bar{B}) \equiv 0$

$$\text{zatem z (15):} \quad \text{div} \bar{M} = 0$$

Zwizek (2). Przypuścimy: $\bar{\Pi} = Q(xyz) \cdot \bar{P}$ gdzie Q skalar
 $\bar{\Pi}, \bar{P}$ wektory

Mamy wówczas: $\text{curl } \bar{\Pi} = Q \text{ curl } \bar{P} + v(\nabla Q, \bar{P}) \dots (*)$

Według (16) mamy zatem

$$c. \text{ curl } \bar{M} = i v \left\{ \nabla \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot \bar{\nabla} A \right\} - i v \left\{ \nabla \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \cdot \bar{\nabla} B \right\} \dots (17)$$

ponieważ $\text{curl}(\bar{\nabla} A) = 0$

$$\text{curl}(\bar{\nabla} B) = 0$$

Pierw $\frac{\partial}{\partial t} (v(\bar{\alpha} \bar{\beta})) = v \left(\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) - v \left(\bar{\beta} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} \right)$

i kiedy $\bar{\alpha} = \bar{\nabla} A$; $\bar{\beta} = \bar{\nabla} B$ otrzymujemy (por. §(15) p. 4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} v(\bar{\nabla} A, \bar{\nabla} B) \\ &= v \left\{ \bar{\nabla} A \cdot \nabla \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \right\} - v \left\{ \bar{\nabla} B \cdot \nabla \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \right\} \dots (18) \end{aligned}$$

Z (17), (18) wynika

$$c. \text{ curl } \bar{M} = -i \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \right) \text{ co jest (2) p. 1.}$$

Zadanie III. Fala dana przez (15), (16) jest "czysta".

Skoro $\bar{M} = v(\bar{\nabla} A, \bar{\nabla} B) \dots (15)$

ponieważ $s(\bar{M}, \bar{\nabla} A) = 0$ $s(\bar{M}, \bar{\nabla} B) = 0 \dots (19)$

$$\text{Licz } \bar{M}^2 = \frac{i}{c} \left\{ \frac{\partial B}{\partial t} s(\bar{M}, \bar{\nabla} A) - \frac{\partial A}{\partial t} s(\bar{M}, \bar{\nabla} B) \right\}$$

$$\equiv 0$$

a zatem $J_1 = 0$

$$J_2 = 0$$

fala zatem (15)(16) jest czysta.

D'Alembertjan. Nazywamy D'Alembertjanem, za Lorentzem, operator

(D'Al.) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right)$ który (za przykładem Cauchy'ego) krótko oznaczamy przez \square^2 .

Mamy zatem dla skalarnej $u = u(x, y, z, t)$ równanie faliste (RF) w czystej próżni

(RF) $\square^2 u = 0$

Jeżeli \vec{A} jest wektor, przez $\square^2 \vec{A}$ rozumiemy wektor, którego składowe są

(20) $\square^2 A_x, \square^2 A_y, \square^2 A_z$ Środa
24. 14/VI.

Dwa założenia zasadnicze. Rozumiejąc znowu przez \vec{M} , jak poprzednio, wektor

(21) $\vec{M} = \vec{H} + i\vec{E}$

zakładamy, że wektor \vec{L} i skalarne $P(x, y, z, t)$ (gdzie \vec{L} również, przez swoje składowe L_x, L_y, L_z zależy od x, y, z, t) mają czynić związekom

I. $\vec{M} = i \cdot \text{curl } \vec{L}$

II. $c\vec{M} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + c \cdot \nabla P$

III. $\square^2 \vec{L} = 0$

IV. $\square^2 P = 0$

V. $c \cdot \text{div } \vec{L} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$

Sprawdźmy, czy \vec{M} otrzymany przy pomocy (I) i (II), uczyni zadość równaniom Maxwella, równaniom (1) i (2) p. 1.-

(a) Podług równania (I), mamy

$$\operatorname{div} \bar{M} = i \cdot \operatorname{div}(\operatorname{curl} \bar{L}) \\ = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Zatem (1) p. 1. identycznie sprawdzone.

(b) Podług równania znowu (I), mamy

$$\operatorname{curl} \bar{M} = i \cdot \operatorname{curl}^2 \bar{L} \quad \dots \dots \dots (22)$$

gdzie $\operatorname{curl}^2 \equiv \operatorname{curl}(\operatorname{curl})$

$$= \nabla \operatorname{div} - \nabla^2 \quad \dots \dots (23);$$

lecz w tej tożsamości, która stosuje się przecież tylko do wektorów, trzeba rozumieć przez $\nabla^2 \bar{A}$ taki wektor, którego składowe wynoszą $\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z$.

Mamy zatem

$$\operatorname{curl} \bar{M} = i \{ \nabla \operatorname{div} \bar{L} - \nabla^2 \bar{L} \} \quad \dots \dots (24)$$

Jednakże, z założenia (V):

$$c \cdot \operatorname{div} \bar{L} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots (V)$$

otrzymujemy: $c \cdot \nabla \operatorname{div} \bar{L} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bar{P}) = 0 \quad \dots \dots (25)$

Mamy również, z założenia (III), że

$$\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{L} = 0 \quad \dots \dots (26)$$

Wstawiając zatem, do (24), najprzód (25), potem (26):

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \bar{M} &= i \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bar{P}) - \nabla^2 \bar{L} \right\} \\ &= i \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bar{P}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial t^2} \right\} \\ &= -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \bar{P} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \right\} \quad \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$c. \operatorname{curl} \bar{M} = -i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + \nabla \bar{P} \right\} \quad \dots (27) \text{ powtórnice}$$

Wobec równania II. p. 6. możemy przepisać (27) :

$$c. \operatorname{curl} \bar{M} = -i \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \quad \dots (2)$$

co jest właśnie równaniem (2) Maxwella (p. 1), które mieliśmy otrzymać.

Uwaga dodatkowa. W powyższym wywodzie, pp. 6-7-8, posłużyliśmy się równaniami : (I), (V), (III) oraz (II) ; ale nie posłużyliśmy się ani razu równaniem (IV) : $\nabla^2 P = 0$.

Przekonamy się, istotnie, że to równanie (IV) nie jest niezależnym założeniem ; że może być wyprowadzone z pozostałych.

$$\text{Uważajmy (V) : } c \operatorname{div} \bar{L} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \dots (V)$$

Derując za pomocą $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{L}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (28)$$

$$\text{Mamy dalej (II) : } \bar{M} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + \nabla \bar{P} \quad \dots (II)$$

Derując za pomocą div :

$$\operatorname{div} \bar{M} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{L}) + \operatorname{div} (\nabla \bar{P})$$

$$\text{lub} \quad \operatorname{div} \bar{M} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{L}) + \nabla^2 \bar{P} \quad \dots (29)$$

$$\text{Lecz, według (1) (por. p. 7. ugięty) : } \operatorname{div} \bar{M} = 0 \quad \dots (1)$$

Zatem (29) daje :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{L}) + \nabla^2 \bar{P} = 0 \quad \dots (30)$$

Porównawszy (28) i (30) ze sobą, znajdujemy

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \nabla^2 P$$

czyli właśnie : $\nabla^2 P = 0 \quad \dots$ co jest (IV) . p. 6.

Istotnie zatem (IV) nie jest niezależnym założeniem ; niezależne od siebie

13) wstawiamy tylko (III) i (V), z których wyznaczamy \vec{L} i ρ .

Nazywamy \vec{L} wektoryalnym potencjałem } pola el-m-ego (\vec{E}, \vec{B})
 ρ skalarnym potencjałem

Przy pomocy tych dwóch: \vec{L} , ρ obliczamy \vec{M} : według (I), (II)

Nowe założenia; nowy wektor $\vec{\Pi}$.

Jeszcze raz: równania (III), (IV), (V): kwadratujemy:

$$\square^2 \vec{L} = 0 \quad \dots \dots \dots (III)$$

$$\square^2 \rho = 0 \quad \dots \dots \dots (IV)$$

$$c \cdot \text{div } \vec{L} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots (V)$$

Czy można spełnić te równania za pomocą pewnego wektora

$$\vec{\Pi}(x, y, z, t)$$

Założmy:

$$\vec{L} = - \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \text{curl } \vec{\Pi} \quad \dots \dots \dots (VI) \quad \vec{L} \text{ wektor}$$

$$\rho = + i \cdot \text{div } \vec{\Pi} \quad \dots \dots \dots (VII) \quad \rho \text{ skalar}$$

gdzie $\vec{\Pi}$ ma spełniać równanie typu (RF):

$$\square^2 \vec{\Pi} = 0 \quad \dots \dots \dots (VIII)$$

Nazwijmy $\vec{\Pi}$ "el-magnetycznym wektorem falistym"; gra on rolę zasadniczą w teorii fal el-magnetycznych.

Sprawdźmy możliwość założeń (VI), (VII), (VIII).

(a) Z równania (VI) mamy, skoro $\text{div curl } () \equiv 0$

$$\text{div } \vec{L} = - \frac{i}{c} \text{div} \left(\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \right) \quad \dots \dots \dots (31)$$

Postanawmy

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{L}} = -\frac{i}{c} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) \quad \text{--- (31)}$$

lub

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{L}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (i \operatorname{div} \bar{\Pi}) = 0 \quad \text{--- (32)}$$

Porównawszy (32) z (VII), mamy natychmiast

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{L}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = 0 \quad \text{--- (V)}$$

co jest równaniem (V) (pp. 6 i 9).

(b) Z równania (VII) p. 9., mianowicie

$$\mathcal{P} = i \operatorname{div} \bar{\Pi} \quad \text{--- (VII)}$$

otrzymujemy, działając d'Alembertianem \square^2 :

$$\begin{aligned} \square^2 \mathcal{P} &= i \square^2 (\operatorname{div} \bar{\Pi}) \\ &= i \operatorname{div} (\square^2 \bar{\Pi}) \quad \text{--- (33)} \end{aligned}$$

co, wobec (VIII), daje: $\square^2 \mathcal{P} = 0$ --- (IV)

co jest równaniem (IV) (pp. 6 i 9).

(c) Z równania (VI), mianowicie

$$\bar{\mathcal{L}} = -\frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{curl} \bar{\Pi} \quad \text{--- (VI)}$$

otrzymujemy, działając d'Alembertianem \square^2 :

$$\square^2 \bar{\mathcal{L}} = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\square^2 \bar{\Pi}) + \operatorname{curl} (\square^2 \bar{\Pi}) \quad \text{--- (34)}$$

lecz, wobec (VIII), (34) daje natychmiast

$$\square^2 \bar{L} = 0 \quad \dots \dots (III)$$

co jest równaniem (III) (pp. 6 i 9).

Otrzymaliśmy więc (V), (IV) i (III) (pp. 6 i 9), wychodząc z nowych naszych założeń: (VI), (VII), (VIII).

Wyrazić \bar{H} i \bar{E} przez wektor $\bar{\Pi}$. Wyrazaliśmy poprzednio, za pomocą równań (I) i (II), p. 6., wektor \bar{M} (lub przez \bar{H} i \bar{E}) przez wektor \bar{L} oraz skalarny potencjał \mathcal{P} .

Spróbujmy teraz przypuścić, że nowy wektor $\bar{\Pi}$ jest rzeczywisty i próbujmy, w tem założeniu, wyrazić \bar{H} i \bar{E} przez $\bar{\Pi}$.

Mieliśmy

$$\bar{M} = i \cdot \text{curl } \bar{L} \quad \dots \dots (I) \text{ p. 6}$$

$$c \bar{M} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + c \cdot \nabla \mathcal{P} \quad \dots \dots (II) \text{ p. 6}$$

następnie:

$$\bar{L} = \text{curl } \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \quad \dots \dots (VI) \text{ p. 9}$$

$$\mathcal{P} = i \cdot \text{div } \bar{\Pi} \quad \dots \dots (VII) \text{ p. 9}$$

$$\text{Nawzajem } \bar{M} = \bar{H} + i \bar{E} \quad \dots \dots (X) \text{ p. 1}$$

Łącząc te związki ze sobą, otrzymujemy

$$\bar{H} + i \bar{E} = i \cdot \text{curl} \left\{ \text{curl } \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right\} \quad \dots \dots (35)$$

$$\bar{H} + i \bar{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{curl } \bar{\Pi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right\} + \nabla (i \cdot \text{div } \bar{\Pi}) \quad \dots \dots (36)$$

Wykonujemy działania po stronach powyższych

Otrzymujemy

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = i \cdot \text{curl}^2 \bar{\Pi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) \quad (37)$$

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) - \frac{i}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} + i \cdot \nabla \text{div} \bar{\Pi} \quad (38)$$

lub jeszcze, według znanej tożsamości

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = i \{ \nabla(\text{div} \bar{\Pi}) - \nabla^2 \bar{\Pi} \} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) \quad (39)$$

$$\bar{\mathcal{H}} + i\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) - \frac{i}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} + i \nabla(\text{div} \bar{\Pi}) \quad (40)$$

Ponieważ, według (VIII), p. 9., mamy $\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \bar{\Pi}$

prosto widzimy, że prawe strony równań (39) i (40) są iden-
tyczne; równania zatem (I) i (II) p. 11, przedstawione przez
wprowadzenie do nich wektora $\bar{\Pi}$, dają ten sam wynik.

Ponieważ przypuszczamy obecnie, że $\bar{\Pi}$ jest rzeczywisty, $\bar{\mathcal{H}}$ zaś
oraz $\bar{\mathcal{E}}$ są nie rzeczywiste, zatem z (39) lub (40):

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) \quad \dots \dots (41)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \nabla(\text{div} \bar{\Pi}) - \nabla^2 \bar{\Pi} \quad \text{lub}$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \text{curl}^2 \bar{\Pi} \quad \dots \dots (42)$$

Związki (41) i (42):

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) \quad \dots \dots (41)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \text{curl}^2 \bar{\Pi} \quad \dots \dots (42)$$

stanowią odpowiedź na postawione pytanie.

Mozna sprawdzić bezpośrednio, że (41) i (42) czynią zadość
równaniom zasadniczym (I), (II), (III), (IV) Maxwella (p. 1).

Założenie Rowlanda i H. Hertza

Z Rowlandem i H. Hertzem przypuszczamy, że

$$\Pi_x = 0 \quad \dots \dots \dots (43a)$$

$$\Pi_y = 0 \quad \dots \dots \dots (43b)$$

$$\Pi_z = \Pi(x, y, z, t) \quad \dots \dots \dots (43c)$$

gdzie oczywiście $\nabla^2 \Pi = 0 \quad \dots \dots \dots (44)$

Mamy: $\operatorname{div} \bar{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$

$$\nabla(\operatorname{div} \bar{\Pi}) = \bar{\epsilon}_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} + \bar{\epsilon}_y \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} + \bar{\epsilon}_z \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \bar{\Pi} = \bar{\epsilon}_x \nabla^2 \Pi_x + \bar{\epsilon}_y \nabla^2 \Pi_y + \bar{\epsilon}_z \nabla^2 \Pi_z$$

$$= \bar{\epsilon}_z \nabla^2 \Pi$$

$$\operatorname{curl} \bar{\Pi} = \bar{\epsilon}_x \left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right) + \bar{\epsilon}_y \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \right) + \bar{\epsilon}_z \left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \right)$$

$$= \bar{\epsilon}_x \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \bar{\epsilon}_y \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Z równań (41) i (42) wyprowadamy zatem

$$c \cdot \bar{\mathcal{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\epsilon}_x \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \bar{\epsilon}_y \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right\} \quad \text{zatem}$$

$$c \mathcal{H}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} \quad \dots \dots \dots (45a)$$

$$c \mathcal{H}_y = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \quad \dots \dots \dots (45b)$$

$$c \mathcal{H}_z = 0 \quad \dots \dots \dots (45c)$$

oraz następnie:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} &= \nabla(\operatorname{div} \bar{\Pi}) - \nabla^2 \bar{\Pi} \\ &= \bar{\mathcal{L}}_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} + \bar{\mathcal{L}}_y \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} + \bar{\mathcal{L}}_z \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \bar{\mathcal{L}}_z \cdot \nabla^2 \Pi\end{aligned}$$

a zatem:

$$\mathcal{L}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \quad \dots\dots\dots (46a)$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \quad \dots\dots\dots (46b)$$

$$\mathcal{L}_z = - \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (46c)$$

Rozwiązania (45) i (46) zostały podane przez H. A. Rowlanda w r. 1884. i przez H. Hertz'a w r. 1889.

Ogólniejsze rozwiązania (przez $\bar{\mathcal{L}}$, \mathcal{P} lub dowolny $\bar{\Pi}$) podali Heaviside, Lorentz, Planck i inni uczeni.

{ Dodatkowa uwaga. Można naturalnie iść nieco inną drogą.
Można odrazu założyć

$$\Pi_x = 0 \quad \Pi_y = 0 \quad \Pi_z = \Pi(x, y, z, t)$$

gdzie $\square^2 \Pi = 0$ w równaniach, wyznaczających $\bar{\mathcal{L}}$ i \mathcal{P} , t.j. w (VI) i (VII) p. 9., nie przechodząc przez (41) i (42) p. 12.

Otrzymamy odrazu:

$$\mathcal{L}_x = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad \mathcal{L}_y = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad \mathcal{L}_z = - \frac{i}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

$$\text{oraz } \mathcal{P} = i \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Następnie z $\bar{\mathcal{M}} = i \cdot \operatorname{curl} \bar{\mathcal{L}}$ wyprowadzamy

$$\mathcal{M}_x = \frac{i}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t} + i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x}$$

$$\mathcal{M}_y = - \frac{i}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} + i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y}$$

$$\mathcal{M}_z = - i \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{co zgadza się} \\ \text{z (45) i (46)} \end{array} \right\}$$

Specjalizacja: oscylator harmoniczny prosty

Założmy $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Oscylator harmoniczny prosty w miejscu $(0, 0, 0)$

Badamy falę el-magn-ną, od niego idącą, w (x, y, z) (w przestrzeni)

A stała (amplituda)

$$\left. \begin{array}{l} n\tau = 2\pi \\ c\tau = \lambda \end{array} \right\} n = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad ; \quad ac = 1 \quad ; \quad an = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zakładamy w (43c) p. 13:

$$\Pi(x, y, z, t) = \frac{A}{r} \sin n(t - ar) \quad \dots (47)'$$

$$= \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi c}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad \dots (47)''$$

Otrzymujemy np. dla ξ_x (według 46a)

$$\xi_x = \frac{A_{xz}}{r^3} a^2 n^2 \left\{ -\sin n(t - ar) + \right. \\ \left. + 3\omega \cdot \cos n(t - ar) + 3\omega^2 \cdot \sin n(t - ar) \right\} \quad (48)$$

gdzie $\omega = \frac{1}{anr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \dots (49)$

Jeżeli znajdujemy się w odległości r bardzo znacznej od oscylatora (w porównaniu do długości fali λ), mamy

$$\lambda \ll r \quad \text{wtedy} \quad \omega \ll 1$$

Wzór (48) daje więc, w przybliżeniu

$$\xi_x = - \frac{A_{xz}}{r^3} a^2 n^2 \cdot \sin n(t - ar) \quad \dots (50)$$

$$\text{albo: } \mathcal{L}_x = - \frac{4\pi^2 A x z}{\lambda^2 r^3} \sin \frac{2\pi c}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \dots (50)$$

Przy pomocy podobnych rachunków, w tem samym przybliżeniu, zawsze przyjmujemy $v \ll 1$ i zutrudając dla skrócenia

$$\mathcal{S} = - \frac{4\pi^2 A \sin \frac{2\pi c}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{\lambda^2} \quad \dots (51)$$

Znajdujemy

$$(\bar{\mathcal{E}}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_x = + \frac{x z}{r^3} \mathcal{S} \\ \mathcal{L}_y = + \frac{y z}{r^3} \mathcal{S} \\ \mathcal{L}_z = - \frac{x^2 + y^2}{r^3} \mathcal{S} \end{cases} \quad \dots (52)$$

$$(\bar{\mathcal{H}}) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_x = - \frac{y}{r^2} \mathcal{S} \\ \mathcal{H}_y = + \frac{x}{r^2} \mathcal{S} \\ \mathcal{H}_z = 0 \end{cases} \quad \dots (53)$$

Bliższe poznanie tego el-magn-pola

1.) Mamy: rozumiejąc przez \bar{r} wektor ^(jednostkowy) o składowych $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$: $r_x = \frac{x}{r}$, itd. t.j. dotowy kierunek tego jednostkowego wektora \bar{r} , jest tym samym kierunkiem promienia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\mathcal{S}(\bar{r} \bar{\mathcal{E}}) = r_x \mathcal{L}_x + r_y \mathcal{L}_y + r_z \mathcal{L}_z \quad [\text{według (52)}]:$$

$$= \frac{\mathcal{S}}{r^4} \{ x^2 z + y^2 z - z(x^2 + y^2) \}$$

$$= 0$$

$$\text{Zatem } \bar{\mathcal{E}} \perp \bar{r}$$

... (54)

* $\left\{ \begin{array}{l} \text{Byłoby lepiej} \\ \text{pisać } \bar{r} \\ z_x = \frac{x}{r} \text{ itd.} \end{array} \right.$

2) Rozumiejac wiez przez r_x, r_y, r_z dzialawy kierunkowe $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$

$${}_S(\bar{r}\bar{H}) = r_x H_x + r_y H_y + r_z H_z \quad \text{lub wedlug (53)}$$

$$= \frac{S}{r^3} \{ -xy + yx \}$$

$$= 0$$

$$\text{zatem } \bar{H} \perp \bar{r} \quad \dots (55)$$

$$3) {}_S(\bar{E}\bar{H}) = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$$

$$= \frac{S}{r^5} \{ -xyz + xyz \}$$

$$= 0 \quad \dots (56)$$

$$\text{zatem } \bar{E} \perp \bar{H}$$

A zatem fala et-m-jest poprzeczna: \bar{E} i \bar{H} sa wzajemnie prostopadłe do \bar{r} ; zarazem sa wzajemnie prostopadłe do siebie.

$$4) \bar{E}^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$$

$$= \frac{S^2}{r^6} \{ (x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2 \}$$

$$= \frac{S^2}{r^6} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{S^2}{r^4} (x^2 + y^2) \quad \dots (57)$$

$$5) \bar{H}^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$$

$$= \frac{S^2}{r^4} (x^2 + y^2) \quad \dots (58)$$

$$6) \text{Mamy zatem: } \bar{E}^2 = \bar{H}^2 \quad \dots (59)$$

7) Równania (56) i (59) oznaczają, że

$$J_1 = 0 \quad J_2 = 0 \quad \dots (60)$$

por. (7) (7₂). p. 2. Powiadamy zatem

$$\overline{M}^2 = 0 \quad \overline{M}_*^2 = 0$$

$$\text{oraz } V^2 = c^2 \quad (\text{p. 3})$$

fala el-m- biegnąca od oscylatora jest "czysta" (jednakże tylko w znacznej odległości od oscylatora, gdy $r > \lambda$)

8.) Wektor Poyntinga \overline{R}

$$R_x = \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E}_y \mathcal{H}_z - \mathcal{E}_z \mathcal{H}_y) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5} x (x^2 + y^2) \quad \dots (61)_a$$

$$R_y = \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E}_z \mathcal{H}_x - \mathcal{E}_x \mathcal{H}_z) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5} y (x^2 + y^2) \quad \dots (61)_b$$

$$R_z = \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_y \mathcal{H}_x) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{S^2}{r^5} z (x^2 + y^2) \quad \dots (61)_c$$

$$\text{a zatem: } R_x : R_y : R_z = x : y : z \quad \dots (62)$$

Strumień Poyntinga el-m- energii prądnice w kierunku \overline{r}

Mogliśmy wprost od razu powiedzieć: $\overline{R} = \frac{c}{4\pi} v (\overline{\mathcal{E}} \overline{\mathcal{H}})$ zatem

$\overline{R} \perp \overline{\mathcal{E}}$, $\overline{R} \perp \overline{\mathcal{H}}$; istotnie $\overline{R} \parallel \overline{r}$

9.) Możemy napisać, zamiast równań (61); pamiętając o (57),

(58) i (59), co następuje

$$R_x = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{S^2}{r^4} (x^2 + y^2)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{x}{r} \cdot \overline{\mathcal{E}}^2 \quad \text{oraz podobnie dalej}$$

$$R_x = \frac{x}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{E}^2 \cdot c = \frac{x}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{H}^2 \cdot c$$

$$R_y = \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{E}^2 \cdot c = \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{H}^2 \cdot c \quad (63)$$

$$R_z = \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{E}^2 \cdot c = \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \bar{H}^2 \cdot c$$

albo jeszcze $R_x = \frac{x}{r} \cdot \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) \cdot c = \frac{x}{r} \rho \cdot c$

$$R_y = \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) \cdot c = \frac{y}{r} \rho \cdot c$$

$$R_z = \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) \cdot c = \frac{z}{r} \rho \cdot c$$

gdzie $\rho = \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{H}^2)$ gęstość el-m- energii (pp. 2-3)

Wartość strumienia R el-m- energii jest więc $= \rho c \quad \dots (64)$

jak było do przewidzenia.

Wszystkie składniki w powyższym, od (50) poczynając, są przybliżone i stosując się (w przybliżeniu) dla $r \gg \lambda$.

Podamy teraz nieco inną teorię, pola oscylatora, która obowiązuje bez tego przybliżenia i dlatego może być poprowadzona dalej niż powyższa.

Nowe założenia: Przypuszczamy, że pewna $\bar{\Pi}(x, y, z, t)$ spełnia równanie

$$\square^2 \bar{\Pi} = 0 \quad \dots (I)$$

Zakładamy wówczas, że

$$c \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \bar{\Pi}) \quad \dots (II)$$

$$\bar{E} = \text{curl}^2 \bar{\Pi} \quad \dots (III)$$

Sprawdźmy, czy (I), (II), (III) spełniają 4 fundamentalne równania Maxwellowskie pola el-m-ego w próżni.

1. Mamy z (II) i (III)

$$\begin{aligned} c \cdot \text{curl } \bar{H} &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) \\ &= \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

pierwszy związek Maxwellowski jest zatem spełniony

2. Mamy $\text{curl}^2 \bar{\Pi} = \nabla \text{div } \bar{\Pi} - \nabla^2 \bar{\Pi}$
 $\text{curl} (\text{curl}^2 \bar{\Pi}) = \text{curl} (\nabla \text{div } \bar{\Pi}) - \text{curl} (\nabla^2 \bar{\Pi})$

ale $\text{curl } \nabla () = 0$; zatem

$$\text{curl}^3 \bar{\Pi} = - \text{curl} (\nabla^2 \bar{\Pi}) \quad \dots (*)$$

Owóż z (III): $\text{curl } \bar{E} = \text{curl}^3 \bar{\Pi} = - \text{curl} (\nabla^2 \bar{\Pi})$ (podług (*)) ... ①

oraz z (II): $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{curl } \bar{\Pi})$
 $\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \text{curl} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} \right)$ lub, podług (I):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \text{curl} (c^2 \nabla^2 \bar{\Pi}) = \text{curl} (\nabla^2 \bar{\Pi}) \quad \dots \textcircled{2}$$

porównując ① i ② mamy: $\text{curl } \bar{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$

Co stanowi drugi związek Maxwellowski pola el-m- w próżni

3. Mamy $\text{div } \text{curl} () = 0$

zatem $\text{div } \bar{E} = 0$
 podobnie $\text{div } \bar{H} = 0$ } dodatkowe związki Maxwellowskie w próżni.

Założenie o $\bar{\Pi}$. Przypuśćmy, że vibrator $V(x_0, y_0, z_0)$ ma pewną oś; \bar{l} jest jednostkowy wektor, wskazujący kierunek tej osi; l_x, l_y, l_z są dostawą kierunkowe tego kierunku (stałe w czasie)

Badamy pole w punkcie $M(x, y, z)$; piszemy

$$(1) \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

Przypuszczamy, że wektor $\bar{\Pi}$ idzie jak \bar{l} :

$$(2) \quad \Pi_x : l_x = \Pi_y : l_y = \Pi_z : l_z$$

Zakładamy, że sama wartość skalarna Π czyli Π zależy tylko od r i od t ; tj. że fala Π (skalarna) jest kulista. A zatem

$$(3) \quad \begin{cases} \Pi_x = l_x \Pi(r, t) \\ \Pi_y = l_y \Pi(r, t) \\ \Pi_z = l_z \Pi(r, t) \end{cases}$$

Zakładamy dalej, że $\bar{l} (l_x, l_y, l_z)$ nie zależy od t ; zatem, że

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \Pi(r, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Pi(r, t)$$

Jednostkowy wektor, idący w kierunku \bar{r} , od V do M , będziemy pisali \bar{e} ; jego składowe e_x, e_y, e_z

$$(5) \quad e_x = \frac{x-x_0}{r} \quad ; \quad e_y = \frac{y-y_0}{r} \quad ; \quad e_z = \frac{z-z_0}{r}$$

Obliczamy $\text{div } \bar{\Pi}$. Mamy z (3)

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = l_x \frac{\partial \Pi(r, t)}{\partial x} = l_x \frac{\partial \Pi(r, t)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = e_x l_x \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{i podobnie dalej ;}$$

$$\text{zatem (6)} \quad \text{div } \bar{\Pi} = r(\bar{e} \bar{l}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\text{jeżeli (7)} \quad \sigma = r(\bar{e} \bar{l})$$

Obliczamy pole elektryczne:

Z równania (42): $\vec{E} = \text{curl}^2 \vec{\Pi}$ (p. 19)

(8) ----- $= \nabla(\text{div } \vec{\Pi}) - \nabla^2 \vec{\Pi}$ por. (23). p. 7

wynika

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}(\text{div } \vec{\Pi}) - \nabla^2 \Pi_x$$

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) - \nabla^2 (l_x \Pi)$$

(9) ... $E_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - l_x \nabla^2 \Pi$

ale $\nabla^2 \Pi = \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}$... (10)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (z_x l_x + z_y l_y + z_z l_z)$$

$$= l_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-x_0}{r} \right) + l_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y-y_0}{r} \right) + l_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z-z_0}{r} \right)$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{1}{r^3} \{ l_x (x-x_0)^2 + l_y (y-y_0)(x-x_0) + l_z (z-z_0)(x-x_0) \}$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{x-x_0}{r^3} \{ l_x (x-x_0) + l_y (y-y_0) + l_z (z-z_0) \}$$

$$= \frac{l_x}{r} - \frac{1}{r} z_x \cdot s(\vec{l}, \vec{r})$$

$$= \frac{1}{r} \{ l_x - \sigma \cdot z_x \} \quad \dots (11)$$

Powracając do (9), wobec (10) i (11)

$$E_x = \frac{1}{r} \{ l_x - \sigma \cdot z_x \} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \sigma z_x \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - l_x \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right\}$$

$$= -l_x \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\} + z_x \sigma \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\} \quad (12)$$

Kładąc, dla skrócenia:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \dots \dots (13)$$

$$B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \dots \dots (14)$$

otrzymujemy z (12) pierwsze z pominiętych 3^{ich} równań

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= -l_x B + r_x \sigma A \\ \xi_y &= -l_y B + r_y \sigma A \\ \xi_z &= -l_z B + r_z \sigma A \end{aligned} \right\} (15)$$

Mozemy więc złożyć wektor $\bar{\xi}$ w sposób następujący:

$$\bar{\xi} = -\bar{l} B + \bar{r} \sigma A \quad \dots (16)$$

$\bar{\xi}$ jest wypadkową 2-ech wektorów: jednego, drugiego: $-\bar{l}$, idącego $\parallel \bar{l}$
drugiego, drugiego: σA , idącego $\parallel \bar{r}$

Składowe ξ_1 i ξ_2 . Ułożymy rzuty $\bar{\xi}$ na kierunki \bar{l}, \bar{r} :

$$\begin{aligned} (a) \text{ mamy } \xi_1 &= s(\bar{\xi} \bar{l}) \\ &= -B s(\bar{l} \bar{l}) + \sigma A s(\bar{r} \bar{l}) \\ &= -B + \sigma^2 A. \quad \dots \dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \text{ mamy } \xi_2 &= s(\bar{\xi} \bar{r}) \\ &= -B s(\bar{l} \bar{r}) + \sigma A s(\bar{r} \bar{r}) \\ &= \sigma(-B + A) \quad \dots \dots (18) \end{aligned}$$

Wnioski. Z (16) wynika, że $\bar{\xi}$ leży zawsze w płaszczyźnie poprowadzonej przez \bar{l} i przez \bar{r} (albo \bar{r}). Jednakże wektor

$\bar{\mathcal{E}}$ nie jest oczywiście $\perp \bar{r}$. Gdyby $\bar{\mathcal{E}}$ był $\perp \bar{r}$, wówczas \mathcal{E}_r byłaby $= 0$. Ponieważ wymagałoby to, według (18), aby $\sigma(A-B)$ była $= 0$, A zaś nie może być $= B$ [por. (13) i (14)] więc $\mathcal{E}_r = 0$ tylko wówczas, gdy $\sigma = 0$
t.j. gdy $s(\bar{\mathcal{E}}\bar{\ell}) = 0$

t.j. $\bar{\mathcal{E}}$ jest $\perp \bar{r}$ tylko dla tych $M(xyz)$ do których idący \bar{r} jest \perp osi $\bar{\ell}$; innymi słowy, skoro $\bar{\mathcal{E}}$ jest osią, tylko w płaszczyźnie równika.

1. Tam, w płaszczyźnie równika (względem osi $\bar{\ell}$), mamy $\sigma = 0$; tam zatem, według (16):

$$\bar{\mathcal{E}} = -\bar{\ell} \cdot B$$

zatem $\bar{\mathcal{E}} \parallel \mp \bar{\ell}$, zależnie od tego, czy $B > 0$ czy $B < 0$. Wartość $\bar{\mathcal{E}}$ w tej płaszczyźnie jest $|B|$.

II. W punktach leżących w osi (resp. w przedłużeniu $\pm \bar{\ell}$) mamy $s(\bar{\mathcal{E}}\bar{\ell}) = \pm 1$ a zatem $\sigma^2 = 1$. Jeżeli $z_x = l_x$ itd. wówczas $\sigma = +1$ i mamy $\mathcal{E}_x = -l_x B + l_x A$
 $= l_x(A-B)$ itd.

Jeżeli $z_x = -l_x$ itd., mamy $\sigma = -1$ zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= -l_x B - z_x A \\ &= -l_x B + l_x A \\ &= +l_x(A-B) \text{ itd.}\end{aligned}$$

Wartość $\bar{\mathcal{E}}$ wynosi zawsze $|A-B|$, kierunek $\bar{\mathcal{E}}$ w tych miejscach jest taki jak $\pm \bar{\ell}$ (zależnie od znaku $A-B$).

Pole magnetyczne. Obliczmy \mathcal{H}_x według (41) p. 19
oraz (3) p. 20

$$\text{Mamy } c\mathcal{H}_x = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right\}$$

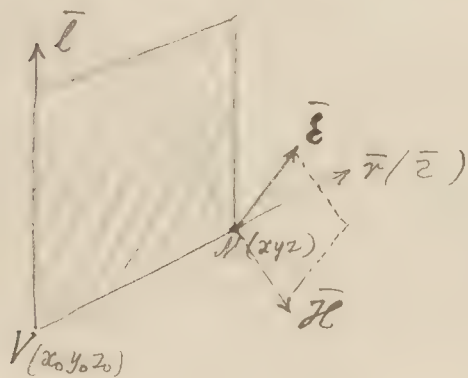
$$\begin{aligned}
 c \mathcal{H}_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ l_z z_y \frac{\partial \Pi}{\partial r} - l_y z_z \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right\} \\
 &= (z_y l_z - z_z l_y) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial r} \quad \dots (19a)
 \end{aligned}$$

Mamy zatem: $c \bar{\mathcal{H}} = v(\bar{r}\bar{l}) \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial r} \quad \dots (20)$

albo, pisząc: $C = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} \quad \dots (21)$

mamy $\bar{\mathcal{H}} = v(\bar{r}\bar{l}) \cdot C \quad \dots (22)$

Wnioski: z równania (22) widzimy, że wektor $\bar{\mathcal{H}}$ jest zawsze prostopadły do płaszczyzny poruszającej przez \bar{r} i przez \bar{l} ; a zatem zawsze \perp do $\bar{\xi}$, który leży w tej właśnie płaszczyźnie (zob. p. 22 u dołu).



$$\bar{\xi} \text{ w pł. } (\bar{r}\bar{l}) \quad \dots (23)$$

$$\bar{\mathcal{H}} \perp \text{pł. } (\bar{r}\bar{l}) \quad \dots (24)$$

$$\bar{\mathcal{H}} \perp \bar{\xi} \quad \dots (25)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ale } \bar{\xi} \text{ (względnie) } &\text{nie } \perp \bar{r} \\
 &\text{nie } \perp \bar{l}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{ale } \bar{\xi} \text{ (względnie) } &\text{nie } \perp \bar{r} \\ &\text{nie } \perp \bar{l} \end{aligned}} \right\} (26)$$

$\bar{\mathcal{H}}$ zatem jest poprzeczny ($\perp \bar{r}$)

$\bar{\xi}$ nie jest natomiast poprzeczny

W płaszczyźnie równikowej $v(\bar{r}\bar{l}) = 1$ jest największy, zatem $\bar{\mathcal{H}}$ w tej płaszczyźnie, dla danego r , (na kuli) jest największy, skoro C nie zależy od kąta $(\bar{r}\bar{l})$

W punktach leżących na osi \bar{l} (w tej płaszczyźnie) mamy kąt $(\bar{r}\bar{l}) = 0$, więc $v(\bar{r}\bar{l}) = 0$ więc $\bar{\mathcal{H}} = 0$

Czy fala (\bar{E}, \bar{H}) biegnąca od wibratora, jest czysta?

Według (25), mamy $s(\bar{E}\bar{H}) = 0$

$$\text{zatem } J_2 = 0$$

Ale J_1 nie jest $= 0$. Z równań (15) p. 22 i (22) p. 24:

$$\bar{E}^2 = B^2 + \sigma^2 A^2 - 2\sigma AB (v_x l_x + v_y l_y + v_z l_z)$$

$$\bar{E}^2 = B^2 + \sigma^2 A^2 - 2\sigma^2 AB \quad \dots (27)$$

$$\bar{H}^2 = (v(\bar{E}l))^2 C^2 \quad ; \text{ lub } v(\bar{E}l) = \sqrt{1 - \sigma^2}$$

$$\bar{H}^2 = (1 - \sigma^2) C^2 \quad \dots (28)$$

widzimy, że \bar{E}^2 i \bar{H}^2 nie są nacgił równe sobie i J_1 nie jest $= 0$

Fala nacgił nie jest czysta.

Specjalna postać wzorów. Przypuścimy, że oś x wybra-
liśmy w kierunku osi \bar{E} wibratora. Mamy wówczas

$$\sigma = s(\bar{E}l) = v_x$$

$$l_x = 1 \quad l_y = 0 \quad l_z = 0$$

Zatem z (15) p. 22:

$$E_x = -B + v_x^2 A$$

$$E_y = v_y v_x A$$

$$E_z = v_z v_x A$$

dalej z (19) (20) p. 24

$$H_x = 0$$

$$H_y = v_z C$$

$$H_z = -v_y C$$

Sprawdzić, w tym przypadku szczególnym, że $s(\vec{E}\vec{H}) = 0$

Podobnie można rozważyć także przypadki szczególne, gdy

$$\vec{l} \parallel O_y \quad \text{lub} \quad \vec{l} \parallel O_z$$

Twierdzenie Poyntinga. Uważamy iloczyn wektrowy

$$\begin{aligned} v(\vec{E}\vec{H}) &= v\{-\vec{l} \cdot B + \vec{z} \cdot \sigma A (v(\vec{z}\vec{l})), C \\ &= -BC \cdot v(\vec{l} \cdot v(\vec{z}\vec{l})) + \sigma AC \cdot v(\vec{z} \cdot v(\vec{z}\vec{l})) \end{aligned}$$

albo, podług przysku wektrowego na str. 27:

$$v(\vec{E}\vec{H}) = -BC \cdot (\vec{z} - \sigma \vec{l}) + \sigma AC \cdot (\sigma \vec{z} - \vec{l}) \quad \dots (29)$$

Wyobraźmy sobie powierzchnię kulistą S , której środkiem jest $V(x_0, y_0, z_0)$, promień zaś wynosi r . Jak poprzednio, \vec{z} jest $\perp dS$ nazewnątrz. Ilość energii el-m-, przepływającej przez całą S w 1-ce czasu, wynosi według twierdzenia Poyntinga

$$= \frac{c}{4\pi} \iint_S dS \cdot s(\vec{z} \cdot v(\vec{E}\vec{H})) \quad \dots (30)$$

lub według (29)

$$+ \frac{c}{4\pi} BC \iint_S dS \cdot s(\vec{z} \cdot (\vec{z} - \sigma \vec{l})) - \frac{c}{4\pi} \sigma AC \iint_S dS \cdot s(\vec{z} \cdot (\sigma \vec{z} - \vec{l})) \quad \dots (31)$$

$$\text{Ale } s(\vec{z} \cdot (\sigma \vec{z} - \vec{l})) = \sigma \vec{z}^2 - s(\vec{z}\vec{l})$$

$$= \sigma - \sigma$$

$$= 0$$

zatem cała druga = 0

{ Przypisek wektorowy. I. Obliczyć $v(\bar{l} \cdot v(\bar{r}\bar{l}))$

$$\begin{aligned} x\text{-owa składowa tego iloczynu} &= l_y(r_x l_y - r_y l_x) - l_z(r_z l_x - r_x l_z) \\ &= r_x(l_y^2 + l_z^2) - l_x(r_y l_y + r_z l_z) \\ &= r_x(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) - l_x(r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z) \\ &= r_x - \sigma l_x \end{aligned}$$

a zatem

$$v(\bar{l} \cdot v(\bar{r}\bar{l})) = \bar{r} - \sigma \bar{l}$$

II. Obliczyć $v(\bar{r} \cdot v(\bar{r}\bar{l}))$

$$\begin{aligned} x\text{-owa składowa tego iloczynu} &= r_y(r_x l_y - r_y l_x) - r_z(r_z l_x - r_x l_z) \\ &= r_x(r_y l_y + r_z l_z) - l_x(r_y^2 + r_z^2) \\ &= r_x(r_x l_x + r_y l_y + r_z l_z) - l_x(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \\ &= \sigma \cdot r_x - l_x \end{aligned}$$

a zatem

$$v(\bar{r} \cdot v(\bar{r}\bar{l})) = \sigma \cdot \bar{r} - \bar{l} \quad \}$$

W całości powyższej

$$\begin{aligned} s(\bar{r} \cdot (\bar{r} - \sigma \bar{l})) &= 1 - \sigma^2 \\ &= 1 - \cos^2 \theta \quad \text{jeżeli } \cos(\bar{r}\bar{l}) = \theta \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{Zatem (31)} = + \frac{c}{4\pi} BC \iint_S dS \cdot \sin^2 \theta$$

Albo $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\chi$ we współrzędnych kulistych; zatem:

$$(31) = + \frac{c}{2\pi} BC \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\chi = + \frac{2}{3} c \cdot r^2 BC \quad (32)$$

Specjalizacja założeń. Podobnie jak dawniej, możemy przypuścić, że Rowlandem i Hertzem, że

$$\Pi(r, t) = - \frac{iA}{r} e^{in(t-ar)} \quad \dots (33)$$

gdzie A stała amplituda, $ac=1$.

{ Uwaga wtręcona. Założyliśmy, p. 19, że Π skalarna czyni założyć równanie

$$* \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Pi$$

Al., ponieważ $\Pi = \Pi(r, t)$ przeto $\nabla^2 \Pi = \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}$

$$\text{Cwóż} \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi) = \Pi + r \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = r \nabla^2 \Pi$$

Zatem równanie * powyższe daje

$$r \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi)$$

$$\text{lub} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Pi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) \quad \dots (34)$$

Zatem $(r\Pi)$ czyni założyć równania "strun drgających"

Według wdanego twierdzenia, $r\Pi$ jest zatem funkcją: bądź argumentu $(r-ct)$, bądź argumentu $(r+ct)$.

Ponieważ $ac=1$, przeto założenie (33) czyni założyć temu wymaganiu. }

Bierzemy na uwagę najpierw tę część pola, która leży nadzwyczaj blisko wibratora $V(x_0, y_0, z_0)$. W tej dziedzinie r jest z założenia nadzwyczaj mała; przypuścimy, że jest tak mała,

możemy zaniedbać ar wobec \underline{t} w wyrazie $\varepsilon^{in(t-ar)}$. Prawa strona równania (33) p. 28 jest wówczas proporcjonalna do $(\frac{1}{r})$ tylko. Wiemy jednak, że $(\frac{1}{r})$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0 \quad \dots (35)$$

zatem w tej dziedzinie pola możemy przyjąć $\nabla^2 \Pi = 0$

z (8) p. 21. otrzymujemy zatem, w tej dziedzinie pola

$$\vec{E} = \nabla(\text{div } \vec{\Pi}) \quad \dots (36)$$

Obliczamy $\text{div } \Pi$ z (33) p. 28, według wzoru (6) p. 20:

$$\text{div } \vec{\Pi} = \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \dots (37)$$

Mamy (33): $\Pi = -\frac{iA}{r} \varepsilon^{in(t-ar)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= +\frac{iA}{r^2} \varepsilon^{in(t-ar)} + ian \frac{iA}{r} \varepsilon^{in(t-ar)} \\ &= \frac{iA}{r^2} \varepsilon^{in(t-ar)} \{1 + ianr\} \end{aligned}$$

lub w dziedzinie pola nadzupniak bliskiej $V(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{iA}{r^2} \varepsilon^{in(t-\cancel{ar})} \quad \dots (38) \quad \left\{ \begin{array}{l} ar \text{ według} \\ \text{zasady} \\ \text{opuszczamy} \end{array} \right.$$

Zatem (37):

$$\text{div } \vec{\Pi} = s(\vec{e} \cdot \vec{\ell}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{lub, według (38):}$$

$$\begin{aligned} &= s(\vec{e} \cdot \vec{\ell}) \cdot \frac{iA}{r^2} \varepsilon^{in(t-ar)} \\ &= iA \varepsilon^{in(t-\cancel{ar})} s\left(\frac{\vec{e}}{r^2} \cdot \vec{\ell}\right) \quad \dots (39) \end{aligned}$$

$$\text{Ale } \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \left\{ \vec{e}_x \left(\frac{x-x_0}{r}\right) + \vec{e}_y \left(\frac{y-y_0}{r}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{z-z_0}{r}\right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{e}}{r^2} \quad (40) \quad \text{gdzie } \vec{r} = \vec{e} \cdot r$$

Uwzględnając (40) : $\frac{\bar{\varepsilon}}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

w równaniu (39), mamy

$$\text{div } \Pi = -iA \varepsilon^{in(t-\frac{r}{c})} s(\bar{\ell} \cdot \overline{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}) \quad \dots (41)$$

Oznaczmy

$$\bar{\mathcal{L}} = -iA \varepsilon^{in(t-\frac{r}{c})} \bar{\ell} \quad \dots (42)$$

Równanie (41) przepisujemy wówczas

$$\text{div } \Pi = s(\bar{\mathcal{L}} \cdot \overline{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}) \quad \dots (43)$$

Porównując do (36) p. 29, mamy

$$\bar{\mathcal{E}} = \nabla s(\bar{\mathcal{L}} \cdot \overline{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}) \quad \dots (44)$$

a zatem $s(\bar{\mathcal{L}} \cdot \overline{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)})$ wyraża potencjał, istniejący w bezpośrednim pobliżu wibratora. Stąd, według znanego twierdzenia o polu elektrycznem "dwaźródła" albo "podwójnego" elektrycznego układu 2^{go} rzędu (parę), wnosiemy, że $\bar{\mathcal{L}}$ jest momentem tej pary czyli tego wibratora $V(x_0, y_0, z_0)$. Ponieważ $\bar{\mathcal{L}}$ idzie jak $\pm \bar{\ell}$ [według (42)], rozumiemy zatem, klasę $\bar{\mathcal{L}}$ nazywaliśmy w całym tym wywodzie osią; jest to po prostu ós dwaźródła, równoważnego wibratorowi V . A ponieważ, według (42), moment $\bar{\mathcal{L}}$ jest peryodycznie zmienny, z częstotliwością n , z czasem t :

$$\bar{\mathcal{L}} = -iA \varepsilon^{int} \bar{\ell} \quad \dots (45)$$

zatem dwaźródło, o peryodyczności (ε^{int}) (z czasem) zmiennym momentem jest równoważne drganiu harmonicznemu prostemu ujemnego el-go ładunku (punktowego) względem dodatniego.

Dokończenie rachunku. Na zasadzie założenia (33) p. 28,

przy pomocy określeń (13), (14) p. 22

oraz (21) p. 24, otrzymujemy wyrażenia dla wartości \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , od których zależy $\bar{\mathcal{E}}$ i $\bar{\mathcal{H}}$ jak wiadomo (pp. 22 i 24).

Rozumując przez ω stosunek (liczbę cykliczną)

$$\left\{ \begin{aligned} cT = \underline{\lambda} &= \frac{2\pi c}{n} \\ \text{gdzie } \underline{\lambda} &\text{ długość fali} \end{aligned} \right\}$$

$$\omega = \frac{1}{anr} = \frac{c}{nr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \dots (45)$$

znajdujemy

$$\underline{A} = \frac{n^2 A \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \{ i + 3\omega - 3i\omega^2 \} \quad (46)$$

$$\underline{B} = \frac{n^2 A \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \{ i + \omega - i\omega^2 \} \quad (47)$$

$$\underline{C} = - \frac{n^2 A \varepsilon^{in(t-ar)}}{c^2 r} \{ i + \omega \} \quad (48)$$

Jeżeli rozważamy dziedzinę bardzo oddalę od wibratora, tak że $r \gg \lambda$,
możemy zaniedbywać ω i wówczas

$$\underline{A} = \underline{B} = -\underline{C} \quad \dots (49)$$

Wówczas, według (18) p. 22: $\mathcal{E}_z = 0$ więc $\bar{\mathcal{E}}$ jest $\perp \bar{r}$ (por. pp. 23-24)

w ogromnej odległości $\bar{\mathcal{E}}$ jest poprzeczny

$$\begin{aligned} \text{Według (27) p. 25 mamy wówczas } \bar{\mathcal{E}}^2 &= A^2 + \sigma^2 A^2 - 2\sigma^2 A^2 \\ &= (1 - \sigma^2) A^2 \end{aligned}$$

$$\text{mamy zatem wówczas [por. (28) p. 25]} \quad \bar{\mathcal{E}}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2 \quad \dots (50)$$

i wówczas (w tym przybliżeniu) fala jest czysta.

Przepływ energii od wibratora, na zewnątrz. Powracając do (32) pp. 26-27, według twierdzenia Poyntinga, otrzymujemy na ów przepływ w 1^{cie} czasie, przez całą powierzchnię kulistą S :

$$\frac{2}{3} c \cdot r^2 \cdot BC$$

lub dla $r \gg \lambda$, skoro $C = -B$ (p. 31) (równ. (49))

$$= -\frac{2}{3} c r^2 \cdot B^2$$

lub, według (47) p. 31

$$= +\frac{2}{3} c \dot{x}^2 \cdot \frac{n^4 A^2}{c^3 \dot{x}^2} \varepsilon^{2n(t-ar)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^4 A^2}{c^3} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}^{2n(t-\frac{r}{c})} \quad \left\{ \begin{matrix} \text{możemy pisać} \\ \cos^2(\), \sin^2(\) \\ \text{w wyr. dla energii} \end{matrix} \right.$$

Jest rzecz bardzo ważna w Optyce molekularnej, że ten przepływ jest wprost proporcjonalny do n^4 . ^{abstrahuje od $\left(\frac{\cos}{\sin}\right)$} Jest niezależny od r^2 , natomiast się samo przez się a priori; wynika energia płynąca przez jedną S , musi przepłynąć przez inną S , jeżeli abstrahujemy o falowań perystodycznych pod znakiem $\left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\}$.



70/99

